《第２講　総合演習（その２）》

3　一つの面が赤，もう一つの面が黒に塗られたカード１枚が，赤い面を上にして置いてある．また，点 Q は数直線上の原点にある．カード面の色に応じて，次の操作を繰り返し行う．

- カードが赤い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{1}{10}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点 Q を正の方向に１動かす．コインの裏が出ればカードはそのままにして，点 Q は動かさない．
- カードが黒い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{2}{5}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点 Q は動かさない．コインの裏が出ればカードはそのままにし，点 Q を負の方向に１動かす．

上記のいずれの操作においても，コインを投げるときコインの表が出るか裏が出るか，必ずどちらか一方が起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　自然数 n に対し，上の操作を n 回繰り返した後，カードが赤い面を上にして置かれている確率を P_n とする．P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(2)　P_n を(1)で定めた確率とする．P_n を n を用いて表し，極限値

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ．

(3)　上の操作を２回繰り返した後，点 Q が原点にある確率を求めよ．

(4)　上の操作を２回繰り返した後，点 Q が原点にあるとする．この条件のもとで，カードが赤い面を上にして置かれている確率を求めよ．

4　曲線 $y=3e^{-2x}$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ がある．ただし，$t>0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点 P における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=3e^{-2x}$ と(1)で求めた接線，および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ．

(3)　(1)で求めた接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 が最大となる t，およびそのときの S_2 の値を求めよ．

(4)　(2)と(3)で定義した S_1，S_2 に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)$ を求めよ．

《第２講　総合演習（その２）》

3　一つの面が赤，もう一つの面が黒に塗られたカード１枚が，赤い面を上にして置いてある．また，点Ｑは数直線上の原点にある．カード面の色に応じて，次の操作を繰り返し行う．

- カードが赤い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{1}{10}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Ｑを正の方向に１動かす．コインの裏が出ればカードはそのままにして，点Ｑは動かさない．
- カードが黒い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{2}{5}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Ｑは動かさない．コインの裏が出ればカードはそのままにし，点Ｑを負の方向に１動かす．

上記のいずれの操作においても，コインを投げるときコインの表が出るか裏が出るか，必ずどちらか一方が起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　自然数 n に対し，上の操作を n 回繰り返した後，カードが赤い面を上にして置かれている確率を P_n とする．P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(2)　P_n を(1)で定めた確率とする．P_n を n を用いて表し，極限値

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ．

(3)　上の操作を２回繰り返した後，点Ｑが原点にある確率を求めよ．

(4)　上の操作を２回繰り返した後，点Ｑが原点にあるとする．この条件のもとで，カードが赤い面を上にして置かれている確率を求めよ．

【答】（1）$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{2}{5}$　（2）$P_n=\frac{1}{5}\left\{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$，極限は $\frac{4}{5}$　（3）$\frac{87}{100}$　（4）$\frac{27}{29}$

【解説】（1）$n+1$ 回目に赤い面が上になるには，

- n 回目に赤い面が上になっていてコインの裏が出る．
- n 回目に黒い面が上になっていてコインの表が出る．

のいずれかなので

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n\times\frac{9}{10}+(1-P_n)\times\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2}P_n+\frac{2}{5} \end{aligned}$$

(2)　$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{2}{5}$ は $P_{n+1}-\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{4}{5}\right)$ と変形できるので

$$P_n-\frac{4}{5}=\left(P_1-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで $P_1=\dfrac{9}{10}$ なので $P_n=\dfrac{1}{5}\left\{4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$.

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{5}$.

(3)　最初，カードは赤い面が上なので，

- コインの表が出た場合は，カードは黒い面が上になり，点 Q は $+1$ に移動するので，原点に進むには次のコインは裏が出ればよい.
- コインの裏が出た場合は，カードは赤い面が上のままで点 Q は原点のままなので，次のコインは裏が出れば点 Q は原点のままである.

以上より，求める確率は $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{87}{100}$.

(4)　(3)より求める条件付き確率は $\dfrac{\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}}{\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}}=\dfrac{27}{29}$.

4　曲線 $y=3e^{-2x}$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ がある．ただし，$t>0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点 P における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=3e^{-2x}$ と(1)で求めた接線，および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ．

(3)　(1)で求めた接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 が最大となる t，およびそのときの S_2 の値を求めよ．

(4)　(2)と(3)で定義した S_1，S_2 に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)$ を求めよ．

【答】 (1)　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$　　(2)　$-\left(3t^2+3t+\dfrac{3}{2}\right)e^{-2t}+\dfrac{3}{2}$

(3)　$t=\dfrac{1}{2}$，$S_2=\dfrac{3}{e}$　　(4)　$\dfrac{3}{2}$

【解説】 (1)　$y=3e^{-2x}$ より $y'=-6e^{-2x}$ なので求める接線の式は

$y=(-6e^{-2t})(x-t)+3e^{-2t}=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$

よって $y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$.

(2)　$y=3e^{-2x}$ より $y'=-6e^{-2x}$，$y''=12e^{-2x}>0$ となるので，曲線は下に凸となり，(1)で求めた接線との共有点は P のみとなる．

よって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t 3e^{-2x}dx-\frac{\{3(2t+1)e^{-2t}+3e^{-2t}\}\times t}{2} \\ &= \left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^t-3t(t+1)e^{-2t} \\ &= -\left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right)e^{-2t}+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3)　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$ と $y=0$ より $x=t+\dfrac{1}{2}$ を得るので

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\times 3(2t+1)e^{-2t}}{2} \\ &= \frac{3}{4}(2t+1)^2e^{-2t} \end{aligned}$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_2 &= \frac{3}{4}\{4(2t+1)e^{-2t}-2(2t+1)^2e^{-2t}\} \\ &= -\frac{3}{2}(2t+1)(2t-1)e^{-2t} \end{aligned}$$

となるから

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$S_2{}'$		$+$	0	$-$	
S_2		↗	$\frac{3}{e}$	↘	

より，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに最大値 $\dfrac{3}{e}$ をとる．

(4)　(2)，(3)より $S_1+S_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}e^{-2t}$ となるので $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)=\dfrac{3}{2}$．